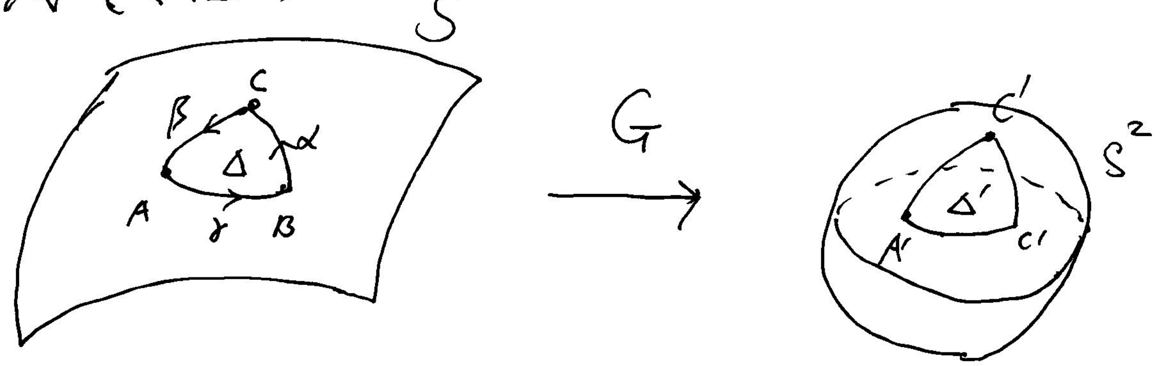
§14 高斯第三定理

高斯证明以下论断：

$S \subset \mathbb{R}^3$ 曲面片（单连通）

$A, B, C \subset S$ 曲面上三点，设 α, β, γ 为连接顶点 A, B, C 的测地线（如图：）



令 $\theta = \angle CAB$, $\theta' = \angle CBA$, $\theta'' = \angle BCA$

则 $\theta + \theta' + \theta'' - \pi = \Delta'$ 的有向面积，

其中 Δ' 是三角形 $\Delta = \Delta ABC$ 在高斯映射下的像。

注记：(1) 由测地线围成的三角形称为测地三角形。

(2) 角度是指在那点处两切线方向的夹角，

(3) Δ' 的有向面积 $= \iint_{\Delta} K\, d\sigma$，$d\sigma$ 是 S 上的面积元。

推论(1) $S \subset \mathbb{R}^3$ 平面，则对于三角形 ΔABC，其内角和 $= \pi$.

(2) $S\subset\mathbb{R}^3$，曲面，$K\equiv0$，则

$\forall$ 测地三角形 $\triangle ABC$，其内角和为$\overset{恒}{\wedge}$ π.

(3) $S\subset\mathbb{R}^3$，半径为 r 的球面，$\triangle ABC$ 为测地三角形

则有式：

$$\text{~~内~~角和} - \pi = \frac{\triangle ABC\text{的面积}}{r^2}$$

另：我们称曲面上两测地三角形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，若其$\underbrace{}_{三个}$对应角相等。球面上两个测地三角形相似，则必全等。(~~即存在等距变换~~

(我们用内蕴曲面几何公式来叙述高斯的证明)

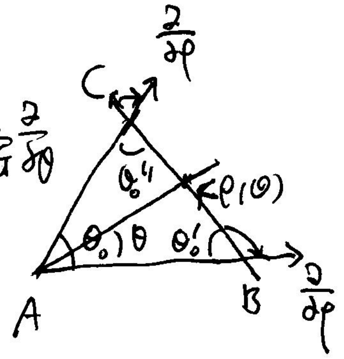
证明：(1) 令 (ρ,θ) 是 A 为中心的测地极坐标系，则

$I = d\rho^2 + (\sqrt{G}d\theta)^2$. 我们将积分

$\iint_{\triangle ABC} K d\sigma$ 的量—用 $\{\rho,\theta\}$ 表达：

记号：将 θ,θ',θ'' 记成 $\theta_0,\theta_0',\theta_0''$，以区别坐标中 θ.

$d\sigma = \sqrt{G}\, d\rho\wedge d\theta$



$\omega_1 = d\rho$, $\omega_2 = \sqrt{G}\,d\theta$, $e_1 = \frac{\partial}{\partial\rho}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial\theta}$

$\omega_{12} = (\sqrt{G})_\rho\, d\theta$

$$K = -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}$$

$$\Rightarrow K d\sigma = -d\omega_{12} = -d[(\sqrt{G})_\rho d\theta) = -(\sqrt{G})_{\rho\rho}\, d\rho\wedge d\theta$$

故需计算：

$$\int_0^{\theta_0}\left(\int_0^{\rho(\theta)} -(\sqrt{G})_{\rho\rho}\, d\rho\right)d\theta$$

(2) 显然，上述积分

$$= -\int_0^{\theta_0}\left(\int_0^{\rho(\theta)} d(\sqrt{G})_\rho\right)d\theta$$

$$= -\int_0^{\theta_0}\left[(\sqrt{G})_\rho(\rho(\theta),\theta) - (\sqrt{G})_\rho(0,\theta)\right]d\theta$$

因为 $(\sqrt{G})_\rho(0,\theta) = 1$，比较严格的说法 $\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt{G})_\rho(\varepsilon,\theta) = 1$

所以，上述积分

$$= -\int_0^{\theta_0} (\sqrt{G})_\rho \, d\theta + \int_0^{\theta_0} d\theta$$

注意到：$\gamma: [0, \theta_0] \longrightarrow D$ 为测地线 BC 的一个

$$\theta \longmapsto (\rho(\theta), \theta)$$

参数表述.

另一方面：我们记 φ 为 $\dot\gamma(s)$（s 为弧长参数）与 e_1 的夹角.

则有 $\dot\gamma(s) = \cos\varphi \cdot e_1 + \sin\varphi \cdot e_2$

由测地线的定义知

$$\nabla\dot\gamma(s) = 0 \Rightarrow \langle \nabla\dot\gamma(s), n(s) \rangle = 0$$

$$\nabla(\dot\gamma(s)) = -\sin\varphi\,[d\varphi + (\sqrt{G})_\rho \, d\theta]\, e_1 + \cos\varphi\,[d\varphi + (\sqrt{G})_\rho \, d\theta]\, e_2$$

$$n(s) = -\sin\varphi \, e_1 + \cos\varphi \cdot e_2$$

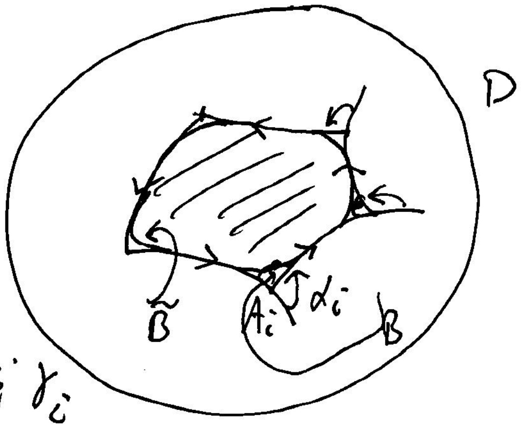
$$\Rightarrow d\varphi = -(\sqrt{G})_\rho \, d\theta$$

$$\Rightarrow \text{上述积分} = \int_{\pi-\theta_0'}^{\theta_0''} d\varphi + \int_0^{\theta_0} d\theta = \theta_0 + \theta_0' + \theta_0'' - \pi$$

#

高斯的定理有以下推广形式：

$\boxed{\text{Gauß - Bonnet 公式}}$：



任取 A_i, $i=1 \cdots n$ 为 D 上点，任取相次联结两点之间的光滑曲线 γ_i

设 α_i 为曲线段在顶点 A_i 处的外角。~~则有~~ 设 $\{\gamma_i\}$ 围成 D 中单连通区域 B，则有等式：

$$\iint_B K d\sigma + \sum_i \int_{\gamma_i} k_g ds + \sum_i \alpha_i = 2\pi$$

注记：在~~高斯~~绝妙定理中取 γ_i 均为测地线。

证明：(1) 取 $\{e_1, e_2\}$ 正交标架，设 $\gamma \in \{\gamma_1 \cdots \gamma_n\}$，记 α 为 $\dot{\gamma}(s)$ 与 e_1 的夹角。

则 $\dot{\gamma}(s) = \cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha \cdot e_2$，则

$$n(s) = -\sin\alpha\, e_1 + \cos\alpha \cdot e_1.$$

$$k_g \cdot ds = \langle \nabla(\cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_2), -\sin\alpha\, e_1 + \cos\alpha\, e_2 \rangle$$
$$= \langle -\sin\alpha \cdot d\alpha\, e_1 + \cos\alpha \cdot \omega_{21} e_1 + \cos\alpha\, d\alpha\, e_2 + \sin\alpha\, \omega_{12} e_1, -\sin\alpha\, e_1 + \cos\alpha\, e_2 \rangle$$

$$= d\alpha + \omega_{12}$$

故

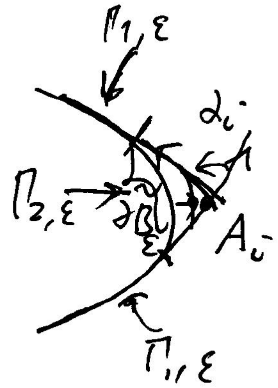
$$\iint_B K\, d\sigma + \sum \int_{\gamma_i} k_g\, ds$$

$$= \iint_B -d\omega_{12} + \sum \int_{\gamma_i} (d\alpha + \omega_{12})$$

$$= \iint_{\partial B} -\omega_{12} + \int_{\partial B} \omega_{12} + \int_{\partial B} d\alpha$$

$$= \int_{\partial B} d\alpha$$

(2) 取光滑曲线 $\partial \tilde{B}_\varepsilon$ 逼近 ∂B （即 $\tilde{B}_\varepsilon \subset B$，其在角点 A_i 处充分接近 A_i，$\varepsilon \to 0$）



记 $\partial \tilde{B}_\varepsilon \cap \partial B = \Gamma_{1,\varepsilon}$; $\partial \tilde{B}_\varepsilon \setminus \partial B = \Gamma_{2,\varepsilon}$

则

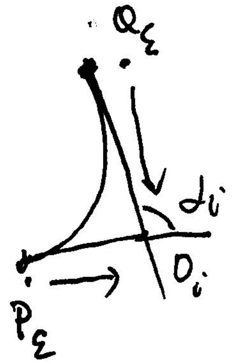
$$\int_{\partial \tilde{B}_\varepsilon} d\alpha = \int_{\Gamma_{1,\varepsilon}} d\alpha + \int_{\Gamma_{2,\varepsilon}} d\alpha$$

事实：$\forall \varepsilon > 0$,

$$\int_{\partial \tilde{B}_\varepsilon} d\alpha = 2\pi \qquad \text{（闭曲线旋转指标定理）}$$

当 $\varepsilon \to 0$. $\Gamma_{1,\varepsilon} \to \partial \tilde{B}$

$\Gamma_{2,\varepsilon} \to A_i$



故
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\Gamma_{1,\varepsilon}} d\alpha + \int_{\Gamma_{2,\varepsilon}} d\alpha \right) = \int_{\partial B} d\alpha + \sum_i \alpha_i$$

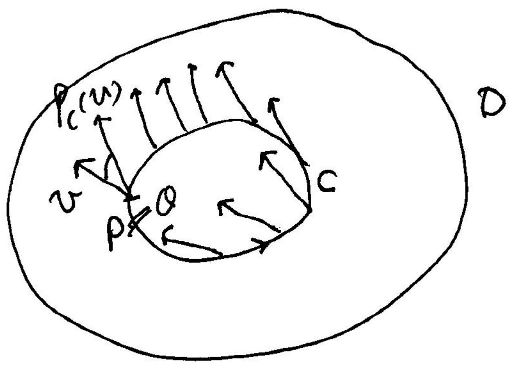
$$\int_{\Gamma_{2,\varepsilon}} d\alpha = \alpha(Q_\varepsilon) - \alpha(P_\varepsilon) \to \alpha(O_i^+) - \alpha(O_i^-) = \alpha_i$$

综合以上，可得

$$\underbrace{\iint_B K\, d\sigma + \sum_i \int_{\gamma_i} k_g\, ds}_{} + \sum_i \alpha_i$$

$$= \int_{\partial B} d\alpha + \sum \alpha_i = 2\pi.$$

#



$C=\partial B$，　B 单连通，　C：光滑，　$P\in C$

$$C:[0,l]\xrightarrow{\gamma=\gamma(s)} D$$

$v\in T_pD$　　　　　　　$\gamma(0)=\gamma(l)=P$

考察 v 沿 C 的平行移动：即　　　s= 弧长参数

$$P_C: T_pD \longrightarrow T_{Q=P}D$$
$$v \longmapsto P_C(v).$$

命题：$\angle$ $P_C(v)$ 与 v 形成的夹角

$$=\iint_B K\,d\sigma.$$

证明：任取 S 上 单位正交标架 e_1, e_2.

设 $v(s)$ 为沿 C 平行向量场，使得 $v(0)=v$

则 $P_c(v)=v(l)$.

记 $v(s)=\cos(\beta(s))e_1+\sin(\beta(s))e_2$

我们要计算 $\beta(l)-\beta(0)$，即 $P_c(v)$ 与 v 的夹角.

由 $v(s)$ 平行移动，得

$$0=\frac{\nabla v}{ds}=\frac{d\beta}{ds}(-\sin\beta\, e_1+\cos\beta\, e_2)$$

$$+\cos\beta\frac{d\omega_{12}}{ds}e_2+\sin\beta\cdot\frac{d\omega_{12}}{ds}e_1$$

与 $(-\sin\beta\, e_1+\cos\beta\, e_2)$ 做内积

$$\Longrightarrow \frac{d\beta}{ds}=-\frac{d\omega_{12}}{ds}$$

即 $d\beta=-\omega_{12}$

设 α 是曲线 C 与 e_1 的夹角. 则有

$$d\alpha+\omega_{12}=k_g\,ds$$

$$\Rightarrow d\alpha-d\beta=k_g\,ds$$

$$\Rightarrow \int_C d\beta=\int_C(d\alpha-k_g\,ds)=2\pi-\int_C k_g\,ds=\iint_B K\,d\sigma.$$

#

§15. 等距同构

问题：$(D_1, \overset{ds_1^2}{\overset{\shortparallel}{I_1}}) \cong (D_2, \overset{ds_2^2}{\overset{\shortparallel}{I_2}})$？ φ 为等距同构 是指

$$\varphi^*(ds_2^2) = ds_1^2$$

由高斯绝妙定理，知 若 $\exists\varphi$，则必有

$$K_2\circ\varphi = K_1, \quad K_i \text{ 为曲面}(D_i, ds_i^2)\text{上的高斯曲率.}$$

$$(\varphi^*(K_2))$$

但这并非充分条件. 事实上，我们利用测地极坐标系可以对这个问题给出一个较为满意的回答：

引理：取 $p\in D$，则存在 p 点的一个邻域 U，使得对任意的 $Q\in U$，在 U 内联结 P, Q 两点的测地线为最短线.

证明：$U \doteq \{\exp_p(w) \mid w\in T_pD,\ |w|<\varepsilon_0\}$. ε_0 为在定义法坐标系时的 ε_0.

然后在 U 上取以 P 为原点的测地坐标系 ~~(ρ,θ)~~

(ρ, θ)，记 $Q=(\rho_0, \theta_0)$ 为该点坐标.

则 ρ 线 $C_{\theta_0} = \{\theta=\theta_0\ \ 0\le\rho\le\rho_0\}$ 为连接 P, Q 的测地线

且长度为 $\rho_0 (<\varepsilon_0)$.

下面证明 C_{θ_0} 为所有联结 P, Q 中最短的曲线。为此，

任取 $C(t): [0:t_0] \longrightarrow D$，使得

$$C(0)=P, \quad C(t_0)=Q.$$

情形 1: $C(t) \subset U$. 则

$C(t)$ 可表为 $(\rho(t), \theta(t))$

$$\Rightarrow \|\dot{C}(t)\|^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + G\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \geq \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2$$

$$\Rightarrow \ell(C) = \int_0^{t_0} \|\dot{C}(t)\|\, dt \geq \int_0^{t_0} \left|\frac{d\rho}{dt}\right| dt$$

$$= \rho(t_0) - \rho(0) = \rho(Q) = \rho_0$$

情形 2. C 不完全落在 U 内，则 C 与 ∂U 有交.

设 $0 \leq t < t_1$，$C(t) \subset U$，则对 $t_2 < t_1$，有

$$C(t_2) = (\rho(t_2), \theta(t_2))$$

情形一 $\Rightarrow$ $$\int_0^{t_2} \|\dot{C}(t)\|\, dt \geq \rho(t_2) \xrightarrow[t_2 \to t_1]{} \varepsilon$$

$$\Rightarrow \ell(C) \geq \int_0^{t_1} \|\dot{C}(t)\|\, dt = \lim_{t_2 \to t_1} \int_0^{t_2} \|\dot{C}(t)\|\, dt$$

$$= \lim_{t_2 \to t_1} \rho(t_2) = \varepsilon > \rho_0$$

#

定理：(等距同构判定定理，局部版本)

令 (D_i, I_i) $i=1,2$ 为两内蕴曲面.

设 $P_i \in D_i$, $i=1,2$, 则存在 P_1 的某个邻域 U_1 到 P_2 的某个邻域 U_2 的等距同构 $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \theta_0 \in [0, 2\pi)$, s.t

$$G_1(\rho, \theta) = G_2(\rho, \theta + \theta_0)$$

其中 $G_i(\rho_i, \theta_i)$ 为 U_i 上测地极坐标系的参数，即

$$\mathrm{I}_1 = d\rho_1^2 + G_1(\rho_1, \theta_1)\, d\theta_1^2, \qquad \mathrm{I}_2 = d\rho_2^2 + G_2(\rho_2, \theta_2)\, d\theta_2^2$$

证明：$(\Leftarrow)$ 令 $\varphi(\rho_1) = \rho_2$, $\varphi(\theta_1) = \theta_2 + \theta_0$

则 $\varphi^*(\mathrm{I}_2) = \mathrm{I}_1$。

$(\Rightarrow)$ 设 $\varphi: U_1 \to U_2$ 等距同构，且 $\varphi(P_1) = P_2$.

任取 $Q_1 \in U_1$, 设 $\gamma =$ 连接 P_1, Q_1 的最短线. 则

φ 等距同构 $\Longrightarrow$ $\varphi(\gamma) =$ 连接 P_2, $Q_2 = \varphi(Q_1)$ 的最短线.

由引理知，φ 把从 P_1 出发的测地线（落在 U_1 内）送到从 P_2 出发

的测地线(落在U_2内).

设 $Q_1=(\rho_1,\theta_1)$ 为 Q_1 在测地极坐标系下的坐标

$\varphi(Q_1)=Q_2=(\rho_2,\theta_2)$ 为 $\varphi(Q_1)$ 在测地坐标系下的坐标.

则知道: $\rho_2=\rho_1$. 即 $\varphi^*(\rho_1)=\rho_2$

设 v_1 为 γ 在P点的单位切线量. 由于测地线唯一由初始切向量决定, 所以 $(d\varphi)_{P_1}(v_1)=v_2$, 其中 v_2 为 $\varphi(\gamma)$ 在 P_2 的单位切向量. 由于 φ 是等距变换, 所以 $\exists\ \theta_0\in[0,2\pi)$, s.t

$$\varphi(\theta_1)=\theta_2+\theta_0$$

故命题成立.

#

习题: (i) $K(\rho,\theta)=-\dfrac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}$ $(\rho\neq 0)$

(ii) $\lim\limits_{\rho\to 0}\ -\dfrac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}=K(P)$, P 为 (ρ,θ) 的原点